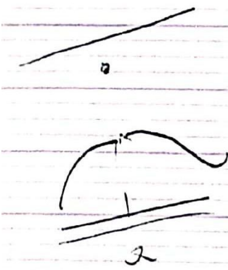
quitte à extraire



$\mathbb{N} \to A$ | $\exists a \in \bar{A}$ avec BW, on suppose
$n \mapsto a_n$ | $(a_n) \to a$
(a_n) injective : $a \in A^{ac}$

III Limites, C^0 :

A) Limites

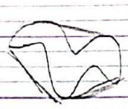
Données : (X,d), (Y,δ) deux em

$A \subset X$, $a \in \bar{A}$, $f : A \to Y$

Déf : On dit que f possède une limite en a selon A lorsqu'il existe $l \in Y$ tq il y ait

$$\forall V \in \mathcal{V}(l)\ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ f(U \cap A) \subset V \quad (\dagger)$$

Formulation $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(B(a,\eta) \cap A) \subset B(l,\varepsilon)$



$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, d(a,x) < \eta \Rightarrow \delta(f(x),l) < \varepsilon$$

Ex pers : $\eta \geq 0$, $\alpha \geq 0$ | remplacer $B(l,\varepsilon)$ par $\bar{B}(l,\varepsilon)$
$B(a,\eta)$ par $\bar{B}(a,\eta)$

$(\dagger)$ se traduit aussi par $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $f^{-1}(V) \cap A$

est un voisinage de ~~A~~ A (a?)

Propriétés : 1) Unicité de l : visuel : si $f \xrightarrow[a,A]{} l$

$f \xrightarrow[a,A]{} l'$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \eta, \eta' > 0$ tq $\forall x \in B(a,\eta) \cap A$ $\delta(f(x),l) < \varepsilon$

et $\forall x \in B(a, \eta') \cap A$, $\delta(f(x), \ell') < \varepsilon$

$a \in \overline{A}$: $B(a, \min(\eta, \eta')) \cap A \neq \emptyset$

$$\delta(\ell, \ell') \leqslant \delta(\ell, f(x)) + \delta(f(x), \ell') \leq 2\varepsilon$$

ε $\Rightarrow$ que $\delta(\ell, \ell') = 0$, $\ell = \ell'$

on écrit $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$

WTF

revenir

2) On suppose $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$, si $a \in A$ on a $f(a) = \ell$; sinon

D/ pour tout $\varepsilon > 0$ $a \in B(a, \eta) \cap A$ donc $\delta(f(a), \ell) \leq \varepsilon$

3) Si f possède une limite en a selon A, elle est bornée sur $V(a)$ (dans A)

avec ~~$\varepsilon > a$~~ $\varepsilon = 1$

Regarder

5) Composition

Ex : $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $x \neq 0$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$g(y) = \chi_{\{0\}}(y)$ $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 0$

$g \circ f\left(\frac{1}{2\pi n}\right) = 1$, $g \circ f\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = 0$

RM = Royal monarch
= Real Madrid

RM - flag p'ij

$g \circ f$ n'a pas de limite en 0

Th: $\begin{cases} f : A \to Y,\ \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b \\ a \in \bar{A} \end{cases}$; $\begin{cases} g : B \to Z,\ \exists \lim\limits_{\substack{y \to b \\ y \in B}} g = \ell \\ b \in \bar{B} \end{cases}$

et si $f(A) \subset B$, $g \circ f$ possède la limite ℓ en a selon A

D/ Soit $W \in \mathcal{V}(\ell)$. Il existe $V \in \mathcal{V}(b)$ $g(V \cap B) \subset W$
$U \in \mathcal{V}(a)$, $f(U \cap A) \subset$

mais aussi $f(U \cap A) \subset f(A) \subset B$

$f(U \cap A) \subset V \cap B$

$g \circ f(U \cap A) \subset W$

Critère séquentiel:

Th: Soit $a \in \bar{A}$, $f : A \to Y$

$\Updownarrow$ f possède une limite en a
$\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $(x_n \to a)$, $(f(x_n))$ converge

alors ce cas $(f(x_n))$ CV vers $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$

D/ $\Downarrow$ Soit $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $(x_n) \to a$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tq : $\forall x \in B(a, \eta) \cap A$

$\delta(f(x), \ell) < \varepsilon$

On $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon\ d(a, x_n) < \eta$; de là
$$(\forall n \geqslant n_\varepsilon)\ \delta(f(x_n), \ell) < \varepsilon.$$

(1) si $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ $(x_n) \to a$ alors $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$
$(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ $(y_n) \to a$

On construit $\begin{cases} z_{2n} = x_n \\ z_{2n+1} = y_n \end{cases}$, alors $(z_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $(z_n) \to a$ donc

par hypothèse $(f(z_n)) \to \ell$ par extraction
$$\begin{cases} f(x_n) \to \ell \\ f(y_n) \to \ell \end{cases}$$

On note ℓ la limite commune de $(f(x_n))$, (x_n) convenable

ABS si ℓ n'est pas la limite
$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \eta > 0\ (\exists x \in B(a, \eta) \cap A)\ (\delta(f(x), \ell) \geqslant \varepsilon_0)$$

$\eta = \frac{1}{n+1}$ on trouve x_n $\begin{cases} x_n \in B(a, \frac{1}{n+1}) \\ \delta(f(x_n), \ell) \geqslant \varepsilon_0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} (x_n) \to a \\ f(x_n) \not\to \ell \end{cases}$ ABS

RM Si Y est complet (tout suite de Cauchy de Y (CV))

$f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ non complet pour $\|\ \|_1$

Pour obtenir une limite pour f en a, IS de mq

$\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, (x_n) \to a \Rightarrow f(x_n)$ de Cauchy (Y)

donc si f satisfait à

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ [\forall (x,y) \in (A \cap B(a,\eta))^2]$

$(\delta(f(x),f(y)) < \varepsilon)$ f possède une limite en a selon A

(Espace non complets : dim infinie, $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ / $\|\ \|_1$ /)

~~(Espace non complets)~~

$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ pour $m, n \geq N$

$\forall f \in E$, $f_n \not\xrightarrow{\|\ \|_1} f$

Appl aux opérations :
les opérations sur les suites convergentes donnent les opérations sur les limites

Ex : ① Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ tq $\exists \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(x/2)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$

Mq f dérivable en 0

S/ On remplace f par $x \mapsto f(x) - 2\ell x$ on se ramène au cas où $\ell = 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta\ \forall x \in [-\eta, \eta]\ -\varepsilon < \frac{f(x) - f(x/2)}{x} < \varepsilon$

$-\varepsilon < \frac{f(x/2^n) - f(x/2^{n+1})}{x/2^n} < \varepsilon$

Cébro $\Rightarrow$ OK

② Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1)-f(x) = L$

Mq $\exists \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$

S/ Soit $\varepsilon>0 \ \exists A>0 \ \forall x \geq A \quad L-\varepsilon < f(x+1)-f(x) < L+\varepsilon$

Soit $B \gg A$, soit $x > B$

il existe $m(x) \in \mathbb{N}$ tq $A \leq x - m(x) < A+1$

par $L-\varepsilon < f(x-m(x)+2) - f(x-m(x)+1) < L+\varepsilon$

$$L-\varepsilon < f(x) - f(x+1) < L+\varepsilon$$

on somme :

$$m(x)(L-\varepsilon) \leq f(x) - f(x-m(x)+1) \leq m(x)(L+\varepsilon)$$

$$L-\varepsilon \leq \frac{f(x)}{x}\underbrace{\frac{x}{m(x)}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 1} - \underbrace{\frac{f(x-m(x))}{m(x)}}_{<\varepsilon \text{ apcr}} \leq L+\varepsilon$$

$$-\varepsilon + \underbrace{(L-\varepsilon)\frac{x}{m(x)}}_{\to L-\varepsilon} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \varepsilon + \underbrace{(L+\varepsilon)\frac{x}{m(x)}}_{\to L+\varepsilon}$$

$$L-3\varepsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq L+3\varepsilon$$

Points de $\mathcal{C}^0$ d'une fonction

$A = X$

Def : f $\mathcal{C}^0$ en a lorsqu'elle vérifie :

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x)$ existe

(2) $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) \; \exists U \in \mathcal{V}(a) : f(U) \subset f(V)$

(3) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in X, \; d(a,x) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$

(1) puisque $a \in X$, $\ell = f(a)$, d'où (2)

(2) $\Rightarrow$ (3) : $V = \overline{B}(f(a), \varepsilon)$, avec (2), il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tq

$$f(U) \subset \overline{B}(f(a), \varepsilon)$$

Or $U \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow \exists \eta \;\; \overline{B}(a, \eta) \subset U$ alors convient

TODO Ex perso : i) remplacer $\leq$ par $<$ dans (3)
ii) Prouver (3) $\Rightarrow$ (2)

Critère séquentiel : f $\mathcal{C}^0$ en $a \in X$
$\Leftrightarrow \forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}} \;\; (x_n) \to a \Rightarrow f(x_n) CV$
(a posteriori vers $f(a)$)

Opérations : Somme, produit, composition

Exercice On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée lorsque f possède une limite à droite et à gauche en tout $x \in [a,b]$
[Ex f monotone]

On suppose que f réglée, Mq l'ensemble des pts de discontinuité est dénombrable

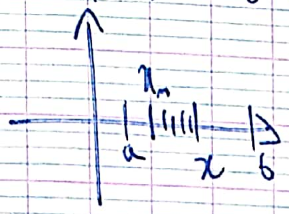
5/ On note pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = \{x \in [a,b],\ |f(x^+) - f(x^-)| \geq \frac{1}{p}\}$

On va mq que chaque A_p est fini

Par l'absurde : si A_p est infini, A_p possède un point d'acc. et donc $\exists (x_n) \in A_p^{\mathbb{N}}$ / x_n est injective, $x_n \to x$

On suppose x_n monotone (quitte à extraire), par ex $x_n \nearrow x$

Améliorer intuition

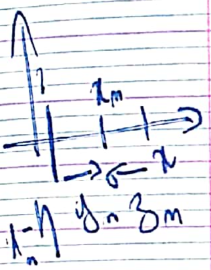


Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{2p}$, Pour n assez grand $x_n \in]x - \varepsilon, x[$

Pour y_n, z_n proche de x_n / $y_n, z_n \in]x - \eta, x[$ $|f(z_n) - f(y_n)| \geq \frac{1}{2p}$

$\Uparrow$

(car $|f(x_n^+) - f(x_n^-)| \geq \frac{1}{p}$)



Mais $|f(y_n) - f(z_n)| \leq |f(y_n) - f(x^-)| + |f(x^-) - f(z_n)|$

$$< \frac{1}{4p} + \frac{1}{4p} = \frac{1}{2p}$$

B) Continuité globale

RMI $f\ (X,d) \to (Y,\delta)$

Alors f est C^0 en $a \iff \forall V \in \mathcal{V}(f(a)),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$

En effet ($\Rightarrow$) Si $V \in \mathcal{V}(f(a))$ il existe $U \in \mathcal{V}(a)$: $f(U) \in \mathcal{V}($

de là $U \subset f^{-1}(V)$ et donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(f(a))$

($\Leftarrow$) il vient $f(U) \subset V$

Th : Soit $f : X \to Y$ une appl, On a :

Très important

1. f est continue sur X [en tout point de X]
2. Pour tout ouvert Ω de Y, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de Y
3. Pour tout fermé F de X, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X

→ D/ $(1) \Rightarrow 2$ Soit Ω un ouvert de Y, soit $a \in O = f^{-1}(\Omega)$

Ω est un ouvert contenant $f(a)$ il existe donc par C^0 de f en point a $U \in V(a)$: $f(U) \subset \Omega$, il vient $U \subset f^{-1}(\Omega) = O$

et donc $O \in V(a)$, Bref O est ouvert

→ $(2) \Rightarrow (1)$ Soit $\varepsilon > 0$, Soit $a \in X$ et prenons $\Omega = B(f(a), \varepsilon)$
$O = f^{-1}(\Omega)$ est donc un ouvert qui possède a.
Il existe donc $\eta > 0$ tq $B(a, \eta) \subset O$ d'où il suit

$f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \varepsilon) \Rightarrow (1)$

→ $(2) \Leftrightarrow (3)$ $\forall B \subset Y$ $f^{-1}(C_Y B) = C_X f^{-1}(B)$

si F est fermé dans Y $\underbrace{f^{-1}(C_Y F)}_{\text{ouvert de } Y} = C_X f^{-1}(F)$

ouvert de Y → ouvert de Y si (2) est vérifié donc $(2) \Rightarrow (3)$

car $C_X f^{-1}(F)$ ouvert $\Rightarrow f^{-1}(F)$ fermé

TODO ** Ex $(3) \Rightarrow (2)$

$\forall \varepsilon > 0 \; B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ sup $\exists \eta \; B(f(a),\eta) \cap f(A) = \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0 \; d(x,a) < \varepsilon$ $\quad d(f(a), f(x)) > \eta$

Ex : $f : X \to Y$, MQ

f est continue
$\Updownarrow$
$\forall A \in P(X)$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

S/ $\Downarrow$ Soit $a \in f(\overline{A})$. $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $(x_n) \to a$

Redo

Comme f est $\mathcal{C}^0$ $f(x_n) \to f(a)$, $f(a) \in \overline{f(A)}$

$\Uparrow$ Soit F un fermé de Y, posons $A = f^{-1}(F)$
[objectif. Mq A est fermé]

Or $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$ d'où $\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(F)$

$\underbrace{\quad}_{f(f^{-1}(F)) \subset F}$

donc $\overline{A} \subset A$, donc $\overline{A} = A$ et A est fermé ✓

APPL : Construction d'ouverts et de fermés

Soit $f : X \xrightarrow{\mathcal{C}^0} Y$ 1) Si $b \in Y$, $f^{-1}\langle\{b\}\rangle = \{x \mid f(x) = b\}$

est fermé

Si $Y = E$ evn, l'ensemble $Z(f) = f^{-1}\langle\{0\}\rangle$ est fermé

2) $Y = \mathbb{R}$ $\{f < 0\}$ est ouvert, de m̂ $\{f > 0\}$, $\{f \neq 0\}$

3) $f, g \; X \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E$ evn, $\{f = g\} = \{f - g = 0\}$ est fermé

Principe de prolongement des identités

Soit $f, g \; X \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E$ evn. Si f et g coïncident sur une partie dense A de X, alors $f = g$

D/ L'ensemble $B = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé par $\mathcal{C}^0$ de f et g, or $A \subset B$, donc $\bar{A} \subset \bar{B} = B$, mais $\bar{A} = X$

$X = B$

<u>Exemple</u> Soit $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ un morphisme de groupe

Mq : Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) f est $\mathcal{C}^0$, 2) $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \lambda x$

3) f est $\mathcal{C}^0$ en un point, 4) f est $\mathcal{C}^0$ en 0

5) f est borné au voisinage de 0 ($\mathcal{V}(0)$)

||| On va Mq : $\forall (r, x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R},\ f(rx) = r f(x)$ (*)

<u>Si $n \in \mathbb{Z}$</u> f étant un morphisme additif, ie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On vérifie par réc sur $|n|$: $\forall x \in \mathbb{R}\ f(nx) = nf(x)$

<u>Puis si</u> $x \in \mathbb{R}$ et $n \neq 0$, il vient : $f(x) = f\left(n \frac{1}{n} x\right) = n f\left(\frac{x}{n}\right)$

et donc $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x)$

Enfin si $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ $f\left(\frac{m}{n} x\right) = \frac{m}{n} f(x)$

<u>Preuve</u> : 2) $\Rightarrow$ 1) (Exprès), 1) $\Rightarrow$ 2) avec (*) il vient

$$\forall r \in \mathbb{Q}\ f(r1) = \underbrace{f(1)}_{\lambda} r = \lambda r$$

or f est $\mathcal{C}^0$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ donc (PPI) $f = \lambda \mathrm{Id}$

144 $\hookrightarrow$ principe de prolongement

Puis $1) \Rightarrow 4) \Rightarrow 3)$.
$\Updownarrow \quad \Downarrow$
$2) \quad 5)$

$3) \Rightarrow 1)$ Soit $a \in \mathbb{R}$ un pt de $\mathcal{C}^0$ de f

soit $b \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $|f(b+h) - f(b)| = |f(h)| = |f(a+h) - f(a)|$

donc $\exists \lim\limits_{h \to 0} |f(a+h) - f(h)| = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{h \to 0} |f(b+h) - f(b)|$

Reste à prouver $5) \Rightarrow 4)$ $(\Rightarrow 2)$

Soit $\alpha > 0$ tq $M = \sup\limits_{x \in [-\alpha, \alpha]} |f(x)| < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, choisissons

$n \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{M}{n} < \varepsilon$ il vient $f\left(\left[-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}\right]\right) = f\left(\frac{1}{n}[-\alpha, \alpha]\right)$

$= \frac{1}{n} f([\alpha, \alpha])$

$\subset \left[-\frac{M}{n}, \frac{M}{n}\right] \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$

Ex : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps ($f(1) = 1$)

Alors $f = Id$

S/ f est aussi un morphisme de groupe additif :
$(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$

$f(\overline{\mathbb{Q}}) = \overline{f(\mathbb{Q})}$ donc $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = f(r \cdot 1) = r f(1) = r$

** Soit $x \geq 0$, $x = (\sqrt{x})^2$, d'où $f(x) = f(\sqrt{x})^2$ donc $f(x) \geq 0$

si $y, z \in \mathbb{R}$ Si $y < z$ $f(z) - f(y) = f(z - y) \geq 0$: $f \nearrow$

$\Rightarrow f([-1,1]) \subset [f(-1), f(1)] = [-1,1]$

f est $\mathcal{C}^0$, f est une homothétie, $f = Id$

Ex : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un endomorphisme de corps $\mathcal{C}^0$

Mq f est l'identité ou la conjugaison

D/ Soit $\underbrace{K}_{\text{corps}} \subset \mathbb{C}$: $f|K \to \mathbb{C}$ morphisme de co. D

il vient, comme ci-dessus $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = r$

Si f est $\mathcal{C}^0$, par densité de $\mathbb{Q}$ et (npi) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x$

On regarde enfin $f(i)$: $f(i)^2 = f(-1) = -1$

$f(i) = i$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x+iy) = f(x) + f(iy) = x + iy$

si $f(i) = -i$ $f(x+iy) = x - iy$

OK

APPL : Morphisme $\mathcal{C}^0$ $(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{g} (]0, +\infty[, \times)$

On regarde $f = \log \circ g$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x+y) = \log(g(x+y))$
$= \log g(x) + \log g(y)$

Delà $\exists a \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax$, $g(x) = e^{ax}$

RM : Structure alg + continuité $\to$ ED a sol $\mathcal{C}^\infty$
$\to$ fonctions spéciales

C) Homéomorphisme :

Catégorie des espaces topologiques : Objets X esp topo.

Morphismes $X \xrightarrow{f} Y$ continue

se composent

isomorphismes : $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ tq $\exists\, g \in \mathcal{C}(Y,X)$ vérifiant

$$f \circ g = Id_Y \text{ et } g \circ f = Id_X$$

(H) f est bijective et f^{-1} continue | on dit que f est un homéomorphisme $X \to Y$

Ex : $(E, \|\,\|)$ est un evn. Soit $(\lambda, a) \in \mathbb{K}^* \times E$

$h_{\lambda,a} \left(\begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto \lambda x + a \end{array} \right)$ Alors $h_{\lambda,a}$ est $\mathcal{C}^0$ et $h^{-1}_{\lambda,a} \left(\begin{array}{l} E \to E \\ y \mapsto \frac{1}{\lambda}(y-a) \end{array} \right)$

RM : $tg :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est un homéomorphisme

RM : $h_{\lambda,a}(B(x,r)) = B(\lambda x + a, |\lambda| r)$ (l'écrire)

* Ex : I et J deux intervalles réels, $f : I \to J$ est une bijection $\mathcal{C}^0$, Alors f^{-1} est $\mathcal{C}^0$ ($\to$ connexité)

⚠ $f\, [0,1[\cup [2,3] \to [0,2]$ | $0 \leq x < 1$ $f(x) = x$; $2 \leq x \leq 3$ $f(x) = x-1$

$\Rightarrow$ f est bijective et $\mathcal{C}^0$, mais f^{-1} est discontinue en 1 $f^{-1}(1^-) = 1$ $f(1^+) = 2$.

Exo Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}$, $f : \Omega \to \Omega'$ une bijection continue, alors f^{-1} est continue

D/ Soient $a \in \Omega$, $b = f(a)$; on veut la $\mathcal{C}^0$ de f^{-1} en b.

Soit $\eta > 0$ tq $]a-\eta, a+\eta[\subset \Omega$; Posons $f_{|]a-\eta,a+\eta[}$ est

~~strict. monotone~~ injective $\mathcal{C}^0$ donc strictement monotone

par ex $\nearrow$, il vient $f(]a-\eta, a+\eta[) =]r,s[\subset \Omega'$ avec

$b \in]r,s[$ $f^{-1}_{|]r,s[}$ est alors $\mathcal{C}^0$ $]r,s[\to]a-\eta, a+\eta[$

$\to$ voisinage de b

donc f^{-1} est $\mathcal{C}^0$ (C.f *)

Espaces non homéomorphes : I intervalle, J non intervalle dans $\mathbb{R}$

D) Applications lipschitziennes

Déf : Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Une application $f(X,d) \to (Y,\delta)$ est dite lipschitzienne s'il existe $k \geqslant 0$ tq $\forall (x,x') \in X^2$, $\delta(f(x), f(x')) \leqslant k\, d(x,x')$

sur $\mathbb{R}$: pentes majorées.

Ex : 1) $(E, \|\ \|)$ evn, $\|\ \|$ est 1-lipsc. $E \to \mathbb{R}$

$\forall (x,y) \in E^2$, $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$

2) Soit $a \in X$ $x \to d(a,x)$ est 1-lipsch car

$\forall (x,x') \in X^2$, $|d(a,x) - d(a,x')| \leqslant d(x,x')$

3) $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ $\Updownarrow$ f lip, f' bornée

D/ $\Uparrow$ Acc finis $\Downarrow$ On note k un rapport de lip

Soit $a \in I$, $h \neq 0$ $\left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right| \leqslant k$, $h \to 0$, $|f'(a)| \leqslant k$

Voc Rapport de lip : inf des nbres $k \geqslant 0$ convenable (atteint)

f strictement contractante.

Ex : Distance d'une partie (VI)

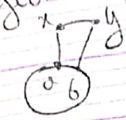
Soit A une partie $\neq \emptyset$ de X. On pose, pour $x \in X$

$$d(x,A) = d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x,a)$$

1) $d_A(x) = 0 \iff x \in \bar{A}$ 2) d_A est 1-lip.

3) Si A et B sont fermés disjoints non vides de X, il existe des ouverts U et V de X tq $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$

géométriquement



S/ 1) $d_A(x) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, d(x,a) < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\iff x \in \bar{A}$

2) Soit $x, y \in X^2$, il vient $\forall a \in A$ $d(a,y) \leq d(a,x) - d(x,y)$

Def. $d_A(y) \leq d(a,x) - d(x,y)$

intuition

Aussi $\forall a \in A$ $d_A(y) - d(x,y) \leq d(a,x)$ } minorant

Enfin $d_A(y) - d(x,y) \leq d_A(x) \Rightarrow d_A(y) - d_A(x) \leq d(x,y)$

$|d_A(y) - d_A(x)| \leq d(x,y)$

3) $f : \begin{pmatrix} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x,B) - d(x,A) \end{pmatrix}$ si $x \in A$, il vient $x \notin \bar{B} = B$ et donc $f(x) = d(x,B)$

Si $x \in B$, $f(x) = -d(x,A) < 0$ $(x \notin \bar{A} = A)$

$\underbrace{A \subset \{f > 0\}}_{U}$ $\underbrace{B \subset \{f < 0\}}_{V}$ | U et V sont ouverts pour C^0 def

Exo Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions k-lip fixé $X \to \mathbb{R}$

On suppose $\exists a \in X$, $(f_i(a))$ majorée, Alors

$f : \begin{pmatrix} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sup_{i \in I} f_i(x) \end{pmatrix}$ est correctement définie et k-lip

D/ Soit $x \in X$ $\forall i$ $|f_i(x) - f_i(a)| \leq k\,d(x,a)$ | donc $\forall i$, $f_i(x) \leq f_i(a) + k\,d(x,a)$

$\forall i$ $\parallel \leq f(a) + k\,d(x,a)$

donc $(f_i(x))$ est correctement définie

Soit $(x,y) \in X^2$ $\forall i \in I$ $f_i(y) \leq f_i(x) + k\,d(x,y)$

$\leq f(x) + k\,d(x,y)$

$\underline{\sup}$: $f(y) - f(x) \leq k\,d(x,y)$

ainsi $f(y) - f(x) \leq k\,d(x,y)$

par symétrie $|f(x) - f(y)| \leq k\,d(x,y)$

Ex Prolong lipsch : Soit $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset X$ k-lip, $A \neq \emptyset$

On pose pour $x \in A$ $g(x) = \inf_{y \in A} (f(y) + k\,d(x,y))$

Mq : g est k-lipschitz et $g_{|A} = f$

S/ Pour tout $y \in A$, $\varphi_y : x \mapsto f(y) + k\,d(x,y)$ est k-lip

Soit $a \in A$ il vient $\varphi_y(a) = f(y) + k\,d(a,y) \geq f(a)$, f k-lip

Avec l'ex précédent $\inf_{y \in A} \varphi_y = g$ est k-lip

De plus prenons $a \in A$, $\varphi_y(a) \geq f(a)$ | $g(a) = \inf \varphi_y(a) = f(a)$

$\varphi_a(a) = f(a)$

⚠ $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ $\|\ \|_2$ lip $\Rightarrow$ OK } MP*2

E) Applicati° unif c°:

Déf: $f:(X,d) \to (Y,\delta)$ est unif c° lorsque

$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0\ \forall (x,x')\in X^2,\ d(x,x')\leq \eta \Rightarrow \delta(f(x),f(x'))<\varepsilon$

Ex: 1) si $f\in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$, f est UC (Heine)

2) si $f: X\to Y$ est k-lip f est UC: prendre $\frac{\varepsilon}{k+1}$

Réciproque fausse. pentes ! $f(x)=\sqrt{x}$, $X=[0,1]$

si $0<x\leq y$, $0\leq \sqrt{y}-\sqrt{x}\leq \sqrt{y-x}=(y-x)^{1/2}$

f est UC avec $\eta=\varepsilon^2$

Si f est k lip il vient $\forall x>0$, $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\leq k$

$\frac{1}{\sqrt{x}}\leq k$

$\to +\infty$ Absurde

Ex: Soit $f\ A\to\mathbb{R}$ UC, Mq f possède une limite en tout point de $\bar{A}$

S/ Soit $a\in\bar{A}$, $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ tq $(x_n)\to a$, $\varepsilon>0$

But: Mq $f(x_n)$ de Cauchy

(H) $\exists \eta>0$ tq $\forall (x,x')\in A^2$, $d(x,x')\leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$

Soit $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\in N$: $d(x_n,a)\leq \eta/2$

lorsque $m,n\geq N$: $d(x_n,x_m)\leq \eta$

donc $|f(x_n)-f(x_m)|\leq \varepsilon$

(CC) $f(x_n)$ est de Cauchy donc CV

Ex E est un EVN $f:\overline{B}(0,1)\to\mathbb{R}$, UC, Mq f est bornée

S/ SNG $f(0)=0$
$\varepsilon=1$ il existe $\eta>0$ tq $\forall (x,x')\in\overline{B}(0,1)^2$

$\|x-x'\|\leq\eta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<1$

Soit $\left|\begin{array}{l} p\in\mathbb{N}^* \text{ tq } \frac{1}{p}<\eta \\ x\in\overline{B}(0,1)\end{array}\right.$ On a $|f(x)|=|f(x)-f(0)|$
$\leq\sum_{k=0}^{p-1}\left(f\left((k+1)\frac{x}{p}\right)-f\left(\frac{kx}{p}\right)\right)$

On $\left\|\frac{kx}{p}-(k+1)\frac{x}{p}\right\|=\frac{\|x\|}{p}\leq\frac{1}{p}<\eta$ donc $\left|f\left((k+1)\frac{x}{p}\right)-f\left(\frac{kx}{p}\right)\right|\leq 1$

$|f(x)|\leq p$

Négation : $\exists\varepsilon_0>0\ \forall\eta>0\ \exists(x,x')\in X^2\ d(x,x')\leq\eta$
et $\delta(x,x')<\eta$ et $\delta(f(x),f(x'))\geq\varepsilon_0$

$\eta=\frac{1}{p}$ —— $\exists(x_p),(x'_p)\in X^{\mathbb{N}}, \forall p \left|\begin{array}{l} d(x_p,x'_p)<\frac{1}{p} \\ \text{et } \delta(f(x_p),f(x'_p))\geq\varepsilon_0\end{array}\right.$

ou encore $\left|\begin{array}{l} d(x_n,x'_n)\to 0 \\ \delta(f(x_n),f(x'_n))\geq\varepsilon_0 \text{ fixé}\end{array}\right.$

Ex : 1) f bornée $\mathcal{C}^0$ ($\mathcal{C}^\infty$) $]0,1]$ non UC ?

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $\left|\begin{array}{l} x_p=\frac{1}{2p\pi} \\ x'_p=\frac{1}{2p\pi+\pi/2}\end{array}\right.$ $|x_p-x'_p|\to 0$ et $|f(x_p)-f(x'_p)|=1$

3) $\sin x^2$ sur $[0,+\infty[$ $\left|\begin{array}{l} x_n = \sqrt{2\pi n} \\ x'_n = \sqrt{2\pi n + \pi/2} \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} |x'_n - x_n| \to 0 \\ |\sin x'^2_n - \sin x_n^2| = 1 \end{array}$

Extensions du Th de Heine:

① Fonctions réciproques ($\to$ Weierstrass trigonométrique)

$T \geq 0$, $E = \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f\ T\text{-périodique}\}$

|| si $f \in E$, f est unif $\mathcal{C}^0$

D/ Soit $\varepsilon > 0$, f est UC sur $[-T, 2T]$ (Heine)

$\exists \eta > 0$ tq $\left|\begin{array}{l} \eta < T \\ \forall (x, x') \in [-T, 2T]^2 \end{array}\right.$

$|x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$

pk $[-T, 2T]$ $\Rightarrow$

Soit $(y, y') \in \mathbb{R}^2$ avec $|y - y'| \leq \eta$ Soit $n \in \mathbb{Z}$: $nT \leq y < (n+1)T$

alors $y' - nT = \underbrace{y' - y}_{\leq \eta} + y - nT \in [-T, 2T]$

et $|(y - nT) - (y' - nT)| \leq \eta$ de là $|f(y) - f(y')|$

$= |f(y - nT) - f(y' - nT)| \leq \varepsilon$

② $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid \exists \lim_{\pm\infty} f = 0\}$

|| Si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, f est UC.

D/ Soit $\varepsilon > 0$, Il existe $A > 0$ tq. $\forall x \in \mathbb{R}$ $|x| \geq A$ $\Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$

f est UC sur $[-A, A]$; il existe $\eta > 0$ tq, $\eta < A$

$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2$ $|x - x'| < \eta$ $\Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$